Über das Fahrrad

Teil 1: Die Grundlagen

Volker Jentsch
http://www.volkerjentsch.de

April 2022, ergänzt im Januar 2025

Geniale Erfindung. Im Teil 1 des Artikels wird die Mechanik erläutert, die das Fahrrad regiert. Das sind die Kräfte, die erforderlich sind, um das Rad gegen vielfältigen Widerstand zum Laufen zu bringen. Auffahrt und Abfahrt, sowie Fahrt bei Gegenwind werden in berechenbare Größen übersetzt und anhand von Beispielen konkretisiert.

1 Einführung

Die Mechanik des Fahrrads scheint komplizierter als man glaubt. Das jedenfalls suggeriert die inzwischen gigantische Anzahl von Artikeln, Blogs und Videos im Internet[1]. Gleichwohl: die Mechanik des herkömmlichen Fahrrads ist elementare Newtonsche Mechanik. Dennoch gibt es die eine oder andere Spezialität, die nicht vom Himmel fällt, folglich mit Hilfe der Physik erklärt und der Mathematik berechenbar gemacht werden muss. Abgesehen davon, ist das Fahrrad ein vorzügliches Gerät zur Erkundung des Raums, so dass – selbst auf die Gefahr der Wiederholung bekannter Tatsachen – ich es für sinnvoll halte, die Mechanismen im Zusammenhang darzustellen. In der Absicht, zu erläutern, was im einzelnen abläuft, wenn sie oder er in die Pedale tritt.

Bekanntlich kommt die Physik nicht ohne Formeln aus, folglich habe ich einige im Text eingefügt. So können individuelle Daten errechnet und mit den experimentellen, von Rad-Computern, Smartphones oder selbstgebastelten Versuchsanordnungen verglichen werden. Die etwas kompliziertere Mathematik, in dem die Lösung der Bewegungsgleichung skizziert wird, ist dagegen in den Anhang verbannt.

Im aktuellen Teil behandele ich die Mechanik des herkömmlichen Fahrrads. Teil 2 ist den Besonderheiten des E-Bike gewidmet.

Wir haben es mit zwei Radfahrern zu tun: Frau A ist klein und wiegt $m_A = 50\,kg$. Und weil kleine Frauen große Männer mögen (das ist statistisch erwiesen) ist Mann B groß und schwer und bringt $m_B = 90\,kg$ auf die Waage (das Gesetz gilt auch in umgekehrter Richtung: große Männer bevorzugen kleine

[1] Ein anschaulich geschriebener Artikel findet sich in www.leifiphysik.de/mechanik

Frauen). Beide sind um die Vierzig. Sie fahren ein vollgefedertes Bergfahrrad. Sie nennen es „ehrlich“, weil sie selbst der Motor sind, also keine Unterstützung in Form elektrischer Energie in Anspruch nehmen. Tatsächlich verdanken sie die Bezeichnung einem Schweizer Bergfahrer, der sein tr traditionelles Gefährt ein „ehrliches“ nannte. Dass es nämlich auch „unehrlich“ vergnüglich geht, nämlich Radfahren mit Unterstützung, darüber wird im Teil 2 berichtet. Die Räder der beiden sind leicht, wiegen nicht mehr als $10\,kg$, so dass sich die effektive Masse (Rad plus Fahrer) für A auf $m_A = 60\,kg$ und für B auf $m_B = 100\,kg$ erhöht.

$A\&B$ müssen Widerstands-Kräfte überwinden, die der Fahrtrichtung entgegengesetzt sind. Auf ebener Strecke sind das in erster Linie Roll- und Luftreibung (inklusive windiges Wetter). Interne Reibung von Lager und Kette, die den Radwiderstand ausmachen, schmälern den Wirkungsgrad um einige Prozent, sind aber bei einem Fahrrad der aktuellen Klasse im Vergleich zu den dominierenden Kräften unbedeutend und werden deshalb nicht berücksichtigt. Am Berg muss vor allem der sogenannte Hangabtrieb kompensiert werden, damit das Fahrrad vorwärts und nicht rückwärts läuft.

2 Reibungskräfte

Rollreibung macht sich als Widerstand bemerkbar, den es zu überwinden gilt, wenn das Fahrrad über eine „raue“ Oberfläche rollt (Die mikroskopischen Prozesse, die Reibung verursachen, sind kompliziert und werden hier nicht weiter erörtert). Die zur Überwindung des Widerstands erforderliche Kraft K_R ist proportional zum Gewicht $G = mg$ des Fahrrads ($g = 9.8\,m/sec^2$). Handelt es sich um eine schräge Ebene, die zur Horizontalen den Winkel α bildet (siehe Abb.1), wird g durch $g\cos\alpha$ ersetzt. Mithin ist die Rollreibungskraft bzw. der Rollwiderstand:

$$K_R = \mu mg\cos\alpha \tag{1}$$

wobei μ den Rollreibungskoeffizienten angibt. Dieser hängt vor allem von der Beschaffenheit des Bodens ab. Die Reibung auf glattem Asphalt ist gering, im Sand bekanntlich ermüdend hoch.
Im *Beispiel* 1 sei der Boden asphaltiert. Der Rollreibungs-Koeffizient ist in diesem Fall $\mu \approx 0.004$, was zur Folge hat, dass B gegen einen Widerstand von etwa $4\,N$ pedalieren muss.[2] N steht für Newton und ist die physikalische Einheit für Kraft. (Newton und Joule sind dasselbe − wenn es sich um die Einheiten der Kraft handelt). Läuft das Fahrrad auf holperigen Waldwegen, wird man wohl von mindestens von einer Verdoppelung des Widerstands ausgehen müssen.
Außer der Bodenbeschaffenheit wird μ vom Luftdruck des Reifen beeinflusst. Ein schlapper Reifen erhöht den Widerstand (aber schont Wirbelsäule und Gelenke). Größe, Breite und Gummimischung des Reifens sind weitere Faktoren. Aber das sind Spitzfindigkeiten, die Radprofis beschäftigen, welche Radrennen gewinnen wollen, folglich die externen Widerstände minimieren müssen. Zu dieser Klasse gehören $A\&B$ erwiesenermaßen nicht.

[2] Für Autos wird ein Wert von ≈ 0.014 angegeben.

Der *Luftwiderstand* wird, wie der Name sagt, durch das „Luftmeer" verursacht, durch das sich $A\&B$ ihren Weg bahnen müssen. Das wird umso schwerer, je schneller sie fahren. Denn die Geschwindigkeit geht quadratisch ein:

$$K_L = \kappa v^2 \tag{2}$$

Der Faktor $\kappa[kg/m]$

$$\kappa = \frac{1}{2} c_w \rho F \tag{3}$$

hängt ab von der Kontur oder Windschlüpfrigkeit von Rad und Fahrer, von dem Typ und der Bauweise des Fahrrad, der Bekleidung und Sitzposition des Fahrers; sie machen die „Stirnfläche" F aus. Außerdem gibt es den Strömungswiderstand-Koeffizienten c_w, der vor allem bei Flugzeugen und Autos eine gewisse Rolle spielt, bei schnittigen Fahrrad etwas unter der eins liegt; schließlich die Luftdichte ρ, die in Bodennähe $1.2\,kg/m^3$ beträgt und in $5000\,m$ Höhe auf $0.74\,kg/m^3$ abnimmt.
Zahlreich ist die Literatur zu den Widerständen durch Reibung, ganz besonders der durch die Luft verursachte. Es fehlt nicht an Betrachtungen und technischen Handreichungen, mit denen der magische Koeffizient κ reduziert werden kann. Dabei ist es doch die Geschwindigkeit des Fahrrads, noch dazu die im Quadrat, die den Fahrer daran hindert, in der Ebene wesentlich schneller als $40\,km/h$ zu werden. $A\&B$ gehören der Gruppe der Rennfahrer bekanntlich nicht an. Ihnen genügt die Aussage, dass aufgrund der Geschwindigkeitsabhängigkeit die Luftreibung bei höheren Geschwindigkeiten die Rollreibung übertrifft. Betrachtet man die beiden Widerstände als Funktion der Geschwindigkeit, ergibt sich bei glatter Bodenbeschaffenheit eine Schwelle von $\approx 16\,km/h$, ungefähr mit $6\,N$ beziffert, oberhalb der die Luftreibung der (von v unabhängigen) Rollreibung davoneilt. Bei rauem Untergrund erhöht sich die Schwelle. [3] Interessant in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, dass – ebenes Gelände vorausgesetzt – die Leistung des Radfahrers, der mit der Geschwindigkeit v unterwegs ist, mit v^3 anwächst. Will er seine Geschwindigkeit um 10% steigern, zum Beispiel von $v_1 = 30\,km/h$ auf $v_2 = 33\,km/h$, muss er eine um 70% höhere Leistung erbringen!

Als Fazit bleibt festzuhalten: $A\&B$ sind passionierte, normal gewichtete und leidlich trainierte Fahrer, die vorwiegend im Schwarzwald bei eher wenig Gegenwind unterwegs sind. Sie rollen bergauf mit Geschwindigkeiten eher unterhalb $15\,km/h$, so dass die beiden davon ausgehen können, dass ihnen die Rollreibung, und auch diese nur bei steinigem, bisweilen feuchten Untergrund, und nicht die Luftreibung zu schaffen macht.

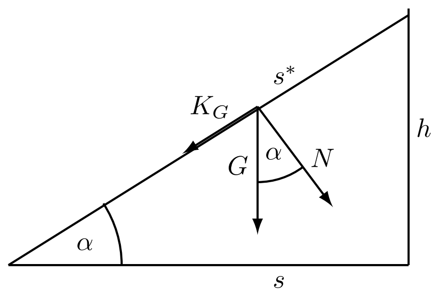
[3] Eine eingängige Herleitung der Luftreibung inklusive Einfluss des Windes findet sich in H.J.Schlichting und R.Nobbe, „Untersuchungen zur Energetik des Fahrrads" (1983) sowie Schlichting und Backhaus, „Physik des Alltags am Beispiel der Energetik des Fahrrads" "(1983).

3 Auffahrt

Während in der Ebene die Reibungskräfte dominieren, sind es am Berg oder der schiefen Ebene (siehe *Abb.*1) die Gravitationskräfte.

Abb. 1:

Rampe mit Steigung α, Normalkraft N, Gewichtskraft G, Hangabtrieb K_G



Genau genommen ist es die Kraft, die aufgewendet werden muss, um der entgegengesetzt gerichteten Kraft, dem sogenannten Hangabtrieb, die Stirn zu bieten. Man nennt sie Hubkraft. Die Berechnung dieser Kraft ist ein Standardbeispiel aus der technischen Mechanik und kann in jedem Physikbuch nachgelesen werden. An dieser Stelle möge der Hinweis genügen, dass an der schiefen Ebene zwei Kräfte wirken: die senkrecht zur Ebene gerichtete Normalkraft und die zum Erdmittelpunkt gerichtete Schwerkraft. Die vektorielle Addition ergibt den Hangabtrieb K_G. Es ist die Kraft, die parallel zur Ebene nach unten gerichtet ist (siehe Abb.1). Rein rechnerisch wird also die Schwerebeschleunigung g durch $\sin\alpha$ ersetzt.

$$K_G = mg \sin\alpha \tag{4}$$

Doch wer sagt unseren Radfahrern, wie groß der Steigungswinkel α ist? Da gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste: ein GPS Gerät oder die App auf dem Smartphone zeigt die Strecke und die Höhendifferenz an. Mit diesen Angaben lässt sich $\sin\alpha = h/s^*$ errechnen. Die zweite: ein Verkehrsschild informiert über die Neigung der Rampe durch die Angabe von Prozenten. Wenn die Steigung nicht überhand nimmt, also etwa unterhalb 25% bleibt, gilt näherungsweise $s^* \approx s$, so dass h/s^* durch h/s bzw. %/100 ersetzt werden darf:[4]

$$K_G = mg(\%/100) \tag{5}$$

Beispiel 2: B erklimme eine Straße von 10%. Dann muss er nach (5) eine Hubkraft von etwa $100\,N$ aufbringen, also deutlich mehr als die vorab bespro-

[4] Eine Angabe von 10% besagt folglich, dass die Vertikale (h) im rechtwinkligen Dreieck 10% oder ein Zehntel der dazugehörenden horizontalen Stecke (s) ausmacht. Gleichbedeutend mit einer Steigung von 6°. Folglich entspricht 100% einem Winkel von 45° oder $h = s$ (und nicht 90°, wie gelegentlich behauptet wird).

chenen Reibungskräfte. Frau A ist auf Grund des geringeren Gewichts besser dran und muss nur $60\,N$ aufbringen. Was das Radfahren betrifft, ist das kleine Gewicht vorteilhafter als das große. Zumindest wenn es bergauf geht.

Zusammengefasst: Der bergauf zu überwindende Widerstand ist folglich $K_\uparrow$ die Summe der Kräfte, die alle in die gleiche Richtung, sprich Fahrrichtung, zeigen

$$K_\uparrow = K_R + K_L + K_G = mg(\mu \cos\alpha + \sin\,\alpha) + \kappa v^2 \tag{6}$$

4 Beschleunigung

Größer als alle bisher behandelten Kräfte ist die Kraft, die erforderlich ist, um z.B. das Fahrrad von Null auf eine Geschwindigkeit $\delta v > 0$ innerhalb der Zeit δt zu beschleunigen. Der dafür erforderliche Kraftaufwand berechnet sich nach $K = mb$; hier ist $b = \delta v/\delta t$ die Beschleunigung des Rads, also dessen Geschwindigkeitszuwachs pro Zeit.

Beispiel 3: B fahre auf ebenem Grund an. Sei $v(t = 0) = 0$. Er will sein Rad innerhalb von 3 Sekunden gleichmäßig auf eine Geschwindigkeit von $v(t = 3sec) = 20\,km/h$ beschleunigen. Dann ist $dt = 3\,sec, dv = 5.6\,m/s$, folglich die Beschleunigung $b = 1.85\,m/s^2$, mithin die enorme (wenn auch meist nur kurzfristig wirkende) Kraft $K = 185\,N$.[5]

5 Arbeit und Leistung

Arbeit W (von W=work) ist Kraft mal Weg, sofern die Kraft in Richtung des Weges s^* zeigt (was beim Radfahren die Regel sein sollte) und die Kraft längst des Weges als konstant angenommen wird:

$$W = K_\uparrow s^* \tag{7}$$

Die potentielle Energie $E = mgh = K_G s^*$ ist ein Spezialfall von (7). Sie ist die Hubarbeit, die $A\&B$ erbracht haben, um die Höhe h zu erreichen. De facto aber muss auch die Reibung überwunden werden, die geht als Wärme verloren, und deshalb ist stets $E < W$.

Die Arbeit kann schnell oder langsam verrichtet werden; das führt auf den Begriff der Leistung P (von P=power). Die momentane Leistung errechnet sich aus

$$P = K_\uparrow v = W/T \tag{8}$$

wenn T die Dauer der Tour (in Sekunden) angibt, somit und $v = s^*/T$. Um nach absolvierter Bergfahrt einen schnellen Überblick über die eigene Leistung zu verschaffen, genügt es, die Hubenergie durch T zu teilen. Es gilt: $P < E/T$. Vom Autofahren sind wir gewöhnt, die Geschwindigkeit in km/h zu messen.

[5] Aufgabe: Um am Berg anzufahren, muss die von B aufzuwendende Kraft größer als der durch (6) ermittelte Widerstandskraft sei. Wie schnell würde B sein, wenn er die gleiche Kraft aufwendet wie in Beispiel 3? Antwort: Auf der 10% Rampe würde er in 3 Sekunden $10km/h$ erreichen, also gerade halb so schnell werden wie auf ebenem Grund.

Beim Radfahren wäre es besser, von m/s zu sprechen; $1\,m/s = 3.6\,km/h$. Mechanische Arbeit wird in Nm angegeben; elektrische Energie in Wattsekunden (Ws) oder (bei Fahrradbatterien) in Wattstunden (Wh) und Leistung in Watt (W):
$1\,Nm = 1\,Joule = 1\,Ws = 1/3600\,Wh$; $1\,Nm/s = 1\,W$, $1\,PS = 0.735\,kW$. $1\,Wh = 0.86\,kcal$.
Beispiel 4: B fährt in der Ebene auf Asphalt. Seine Geschwindigkeit kann sich sehen lassen: $v = 30\,km/h$. Die zu überwindende Reibung (Boden und Luft) erfordere eine Kraft von $20\,N$; folglich erbringt er eine Leistung P von $P = 20 * 30/3.6\,Nm/s$, also $P = 166\,Nm/s = 166\,Watt$.

6 Abfahrt

Angefeuert durch den Hangabtrieb, dem sich die Reibungskräfte widersetzen, ist die resultierende Kraft bei der Abfahrt:

$$K_\downarrow = mg \sin\alpha - mg\mu\cos\alpha - \kappa v^2 \tag{9}$$

die $A\&B$ abwärts beschleunigt. Nach einer gewissen Zeit stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Hangabtrieb und Luftwiderstand ein. Ohne die Widerstände durch Reibung wäre am Ende der Abfahrt weder Energie gewonnen noch verloren; die potentielle Energie würde vollständig in kinetische Energie umgesetzt worden sein. Die Widerstände sorgen dafür, dass Energie in Form von Wärme verloren geht. Während beim Aufstieg aufgrund der geringen Geschwindigkeit v die Luftreibung von sekundärer Bedeutung ist, wird sie beim Abstieg relevant: sie ist die natürliche Bremse (als Fahrtwind fühlbar). Geschwindigkeit und Weg als Funktion der Zeit errechnen sich mit Hilfe der im *Anhang* gegebenen Formeln.
Beispiel 5: Frau A fährt eine $s^* = 5\,km$ lange Abfahrt ohne nennenswerte Kurven; das durchschnittliche Gefälle beträgt 6.3%, es herrscht Windstille. Der Luftwiderstand sei $0.35 kg/m$. Sie rechnet aus, wie lange sie braucht, bis sie unten ankommt. Das Ergebnis: Nach etwa 460 Metern und 53 Sekunden hat sie ihre Endgeschwindigkeit von $41.27\,km/h$ erreicht. Sie benötigt, wenn sie durchhält und nicht bremst, etwa 450 Sekunden, bis sie unten ist (siehe Abb.2) Wie sieht es bei ihrem Partner aus? B ist wegen der größeren Masse deutlich schneller als seine Frau. Nach etwa 900 Metern hat er seine Endgeschwindigkeit von $47.5\,km/h$ erreicht. Er würde etwa eine Minute warten müssen, bis er A, gegebenenfalls sogar mit Küsschen, begrüßen kann.
Wer all das nachrechnen will, oder die Situation mit anderen Zahlen füttern will, nehme den *Anhang* zu Hilfe.

7 Der Wind, der Wind, das himmlische Kind

A beklagt sich zu recht, dass in keiner der zahlreichen Artikel über Fahrräder der Wind eine Rolle spiele. Dabei sei er es doch, der sich einer zügigen Fahrt

in den Weg stelle. Sie kommt aus Kiel und behauptet, dass sie dort immer mit Gegenwind habe kämpfen müssen (Übrigens einer der Gründe für sie, in den Wind ärmeren Südwesten umzusiedeln). Sie hatte den Eindruck, dass sie Berge hochfahre, so stark blies der Wind von vorne. Ihre Frage: welche Rampe oder welche Steigung hätte ich geschafft, wenn ich den Wind im Flachen gegen Windstille am Berg würde tauschen können?
Wenn der Wind von vorn (Gegenwind) oder von hinten (Rückenwind) kommt, muss in (2) v^2 durch v_*^2 ersetzt werden, mit

$$v_*^2 = (v \pm v_w)^2 \tag{10}$$

wobei das (+) Zeichen für Gegenwind und das (−) Zeichen für Rückenwind steht, und v_w die Stärke des Windes in $[m/s]$ angibt.[6]
Beispiel 6: Zurück zu A. Sie fährt in ebenem Gelände mit $v = 20\,km/h$; der Wind bläst von vorne mit $v_w = 15\,km/h$. Der Faktor κ in (3) sei $0.35\,kg/m$. Folglich erbringt sie (bei einer Rollreibung von $4\,N$) gemäß (6) die Kraft $K = 37\,N$, ihre Leistung Kv (beachte: v nicht v^*!) ist $205\,W$. Bei Windstille würde sie bei gleicher Leistung eine Geschwindigkeit von $29\,km/h$ erreichen. Würde sie umdrehen und nunmehr in den Genuss des Rückenwinds kommen, würde sie, gleiche Leistung vorausgesetzt, die beachtliche Geschwindigkeit von $v = 40.5\,km/h$ erreichen.
Würde der Rückenwind nur stark genug sein, oder würde sie ein Segel aufspannen, um ihre „Stirnfläche" zu vergrößern, könnte es dazu kommen, dass A nichts tun müsste; sie wäre die Beifahrerin und der Wind der Fahrer. Dann ist $v^2 = v_w^2 - K_R/\kappa$; die zur Überwindung der Rollreibung erforderliche Kraft würde durch den Wind erbracht. Ein wohl eher seltener Fall, der wenn überhaupt, nur an der Küste anzutreffen ist. Aber Spaß dürfte gewiss sein.
Würde hingegen A ohne Wind in bergigem Land fahren – und das ist die Antwort auf die oben gestellte Frage – würde die Kraft von $37N$ ausreichen, um eine Steigung von 5% zu bewältigen.

8 Entfaltung

Ein wichtiges Merkmal jeden Fahrrads ist die Gangschaltung, bestehend aus Kettenblättern oder Kettenblatt an der Kurbel und den Ritzeln am Hinterrad. Das Verhältnis der beiden bestimmt den Weg S, den das Hinterrad mit Umfang U bei einer Kurbelumdrehung zurücklegt:

$$S = U n_K / n_R \tag{11}$$

erzielt wird.
Beispiel 7. Das Fahrrad von A (und gleichermaßen von B) sei ausgestattet mit einer Kassette, die Ritzel mit $n_R = 10-42$ Zähnen enthält, sowie einem Kettenblatt an der Kurbel mit $n_K = 15$ Zähnen. Das ergibt Übersetzungen von 1.5 bis

[6] Sollte der Wind von der Seite kommen, müssen Wind und Geschwindigkeit vektoriell addiert werden. Aus (10) wird dann $v_*^2 = (v + v_w \cos\epsilon)^2$ mit $\epsilon = 0$ bei Gegenwind und $\epsilon = \pi$ bei Rückenwind.

0.36. Eine Kassette mit $n_R = 10 - 51$ Zähnen, Kettenblatt mit $n_K = 34$ Zähne ergibt Übersetzungen von 3.4 bis 0.67. Multipliziert man die Übersetzungen mit dem Umfang des Reifens, also etwa $U = 2.2\,m$, erhält man die Entfaltung in Metern, also den Streckengewinn pro Kurbelumdrehung. Eine interessante Erweiterung ist die Umrechnung der Entfaltung in Geschwindigkeit. Dazu braucht man die Trittfrequenz f, welche die Anzahl der Umdrehung der Kurbelachse pro Minute angibt. Diese muss in die Winkelgeschwindigkeit ω umgerechnet werden, $\omega = (f/60)2\pi$. Dann ist v (in m/s)

$$v = S\omega \tag{12}$$

Bei hoher Entfaltung (z.B. $6\,m$) und normaler Kurbelei ($f = 60/min$), ergibt sich gemäß (7) eine Geschwindigkeit $v = 37.7\,km/h$ (ohne Berücksichtigung der in (6) zusammengefassten Widerstandskräfte). Bei niedriger Entfaltung (z.B. $2\,m$) müsste man die Kurbel dreimal schneller drehen, um die gleiche Geschwindigkeit zu erreichen. Was schlechterdings unmöglich ist. Anders herum wird ein Schuh daraus. Bei gleicher Trittfrequenz würde eine Geschwindigkeit von etwa $12.5\,km/h$ erreicht, gut genug für eine Steigung von $8 - 10\%$. So lassen sich über die Wahl der Übersetzung Geschwindigkeit und Vortrieb regulieren, mithin die zu erbringende Kraft bzw. Leistung. Naturgemäß auch das Drehmoment M[7].

9 Drehmoment

Da das Fahrrad nur durch beständiges Pedalieren in Bewegung gerät bzw. bleibt, am Fahrrad selbst also eine Drehbewegung stattfindet (im Gegensatz zur gradlinigen Bewegung des Fahrrads als ganzem) kommt neben Kraft, Arbeit und Leistung eine an Drehbewegungen gebundene Größe ins Spiel, das Drehmoment M und (die oben eingeführte) Winkelgeschwindigkeit ω. Je größer M, umso stärker der Antrieb. Wirkt die Kraft senkrecht zum Hebelarm r (gemessen als Abstand der Kurbelachse zum Pedal), so ist das Drehmoment an der Kurbel $M = Kr$. Dieses wirkt über die Kette und treibt das Hinterrad an. Die Leistung errechnet sich aus

$$P = M\omega \tag{13}$$

Hier ist folgendes Szenario von Belang. A drehe das Pedal mit einer Frequenz von $f = 60/min$ und leiste dabei $P = 250\,N$. Das ergibt nach (8) ein Drehmoment von knapp $40\,Nm$. Bleibt noch die Frage, wie kleines oder großes Moment zustande kommt. Ganz einfach: mit Hilfe der Gangschaltung (Entfaltung!) wird zwischen kleinem und großem Ritzel, gleichbleibende Trittfrequenz vorausgesetzt, das Drehmoment an der Kurbel bzw. dem Hinterrad rauf- bzw. runter geschaltet.

[7] dazu R.Paschotta: „Ratgeber E-Bikes“ https://www.energie-lexikon.info/ebike.html

10 Zusammenfassung

Mittels Muskelkraft wird ein Drehmoment auf die Antriebsachse ausgeübt, das über Kettenblatt-Kette-Ritzel auf das Hinterrad geleitet wird. Das Zusammenspiel von Haftreibung und Drehmoment versetzt das Fahrrad in Bewegung. Es wird beschleunigt, bis die gewünschte Geschwindigkeit erreicht ist. Dabei sind Rollreibung, bei höherer Geschwindigkeit Luftreibung und bergauf die Gravitationskraft zu überwinden. Diese beschleunigt, wenn das Rad bergab fährt, und es bremst der Luftwiderstand.
Etwas komplizierter ist der Einfluss des Windes. Kommt er aber nur von hinten oder vorn, sind die Änderungen der Kräftebilanz auch intuitiv leicht verständlich, rechnerisch aber mit einem gewissen Aufwand verbunden.

11 Anhang

Die Rampe mit gleichmäßigem Anstieg sei gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt ()Abb.1). Windstille vorausgesetzt, lautet die Bewegungsgleichung bei der Auffahrt:

$$m\dot{v} = -K_{\uparrow} + K(t) \tag{14}$$

wenn K(t) die vom Fahrer zum Zeitpunkt t verausgabte Kraft ist. Ziel ist, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit $v = V$ bergauf zu fahren. Dann gilt:
$K(t) > K_{\uparrow}$, wenn $0 \leq t \leq T$ (Beschleunigungsphase, v<V)
$K(t) = K_{\uparrow}$, wenn $t > T$ (Erhaltung, $v = V$).

Für die Abfahrt gelte: K(t)=0. Die Abfahrt sei schnell genug, so dass ein eigener Beitrag entfalle. Die Dynamik der Abfahrt ähnelt dem Problem der Fallschirmspringerin. Diese erfährt zunächst eine beschleunigte Bewegung im Gravitationsfeld der Erde, die sobald sich der Schirm öffnet, alsbald in eine gleichmäßige übergeht. Ähnlich verhält es sich bei der Abfahrt mit dem Fahrrad von einer Rampe. Der Fallschirm wird zum Fahrrad.
Mathematisch handelt es sich um eine Differentialgleichung vom „Riccatischen Typ“; die Nichtlinearität ist von quadratischer Natur (v^2). Die Rampe sei gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt.

$$m\dot{v} = K_{\downarrow} \tag{15}$$

beschrieben. Daraus ergibt sich (mit Hilfe der in Abschnitt 1 bzw. Abschnitt 2 beschriebenen Kräfte) sofort die stationäre Geschwindigkeit v_∞

$$v_\infty = \sqrt{(K_G - K_R)/\kappa} \tag{16}$$

Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ist

$$v(t) = v_\infty \tanh x \tag{17}$$

wenn $v(t = 0) = 0$ und $x = (t/m)\sqrt{(K_G - K_R)\kappa}$. Integration von v nach t ergibt das Weg-Zeit Gesetz für die Abfahrt unter Berücksichtigung von Rollund Luftreibung:

$$s(t) - s_0 = (m/\kappa) \ln \cosh x \tag{18}$$

So ist unmittelbar ersichtlich, dass nach geraumer Zeit, gleichbedeutend mit $x \gg 1$, die beschleunigte Bewegung asymptotisch in eine gleichmäßige mit der Geschwindigkeit v_∞ übergeht, mit $K_\downarrow = 0$. [8] Die Situation ist in Abb. 2 illustriert. B startet mit $v = 0$ und überlässt sich der „Kraft der Rampe“, die gegen die Horizontale um 3.6° geneigt sei. Die vertikalen Zeit-Wegmarkierungen veranschaulichen seine zunehmende Geschwindigkeit (Der Weg ist logarithmisch geteilt). Jenseits der letzten Weg-Zeit-Marke setzt sich, sofern nicht gebremst wird, die Fahrt mit v_∞ bis zum Fuß der Rampe fort.

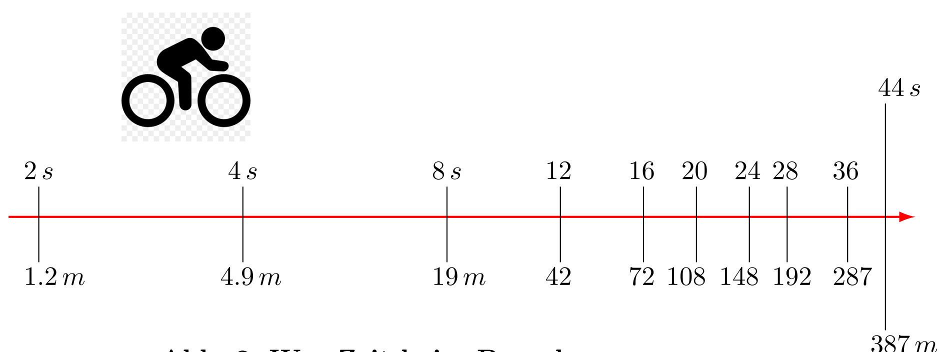


Abb. 2: Weg-Zeit beim Bergab

Eine naheliegende Erweiterung der Abfahrt ist das Ausrollen des Fahrrads, wenn die geneigte Straße in eine ansteigende (inklusive ebene) ausläuft. Der Anstieg werde durch den Winkel $\delta \ \geq 0$ beschrieben. Die Fragestellung lautet: Wie weit komme ich, wenn ich, ohne eigenes Zutun, mit der am Berg gewonnenen Geschwindigkeit mein Fahrrad bis zum Stillstand ausrollen lasse? Hier ist die Antwort.

Für den Auslauf gilt

$$m\dot{v} = -K_G - K_R - K_L \tag{19}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass $\dot{v} <= 0$. Die Lösung der nichtlinearen Gleichung kann in Kenntnis von (15) erraten werden:

$$v(t) = v^* \frac{v_0 \cos(\omega t) - v^* \sin(\omega t)}{v^* \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t)} \tag{20}$$

[8] Wenn die Rampe nicht gleichmäßig fällt – was der Normalfall sein dürfte – also $y'(x) \neq$ *constant*, muss in (9) α durch $\arctan(x)$ an der Stelle$x = s$ gesetzt werden. Die Strecke s ist dann die Bogenlänge der Kurve, gerechnet von $x = 0$. In diesem Fall gibt es keine analytische Lösung.

mit $v^* = g(\alpha)\sqrt{m\mu g/\kappa}$,
$\omega = g(\alpha)\sqrt{\kappa\mu g/m}$,
$g(\alpha) = \sqrt{\sin(\alpha)/\mu + \cos(\alpha)}$.

Integration von (18) liefert

$$s(t) - s_0 = \frac{m}{\kappa} ln(\cos\omega t + \frac{v_0}{v^*}\sin\omega t) \tag{21}$$

Aus (18) ergibt sich die Zeit T, die verstreicht, bis das Rad zum Stillstand ($v(T) = 0$) kommt:

$$T = \omega^{-1}\arctan(v_0/v^*) \tag{22}$$

Wie weit rollt das Fahrrad? Diese Frage wird mit (19) beantwortet, wenn $t = T$:

$$s(T) - s_0 = \frac{m}{2\kappa}\ln(1 + (v_0/v^*)^2) \tag{23}$$

Beispiel 8: Gegeben sei $\kappa = 0.35\,kg/m$, $\mu = 0.004$; $v_0 = 16.3\,m/s$, $s_0 = 0$, $m = 100\,kg$ und ein geringer Anstieg von 2%. Die durch eine 10% - Neigung erzeugte v_0 ist $16.3\,m/s$. Dann ist $T = 38.5\,sec$ und $s(T) = 229.2\,m$. Ohne Luftwiderstand würden die Werte ganz anders aussehen: $T = 117\,sec$ und $s(T) = 459\,m$!
Wer gerne mit Szenarien spielt, um den Effekt der Parameter auf die Abfahrt zu testen, lässt auf meiner Webseite rechnen, animieren und visualisieren: `https://volkerjentsch.de/Fahrrad_1.html`

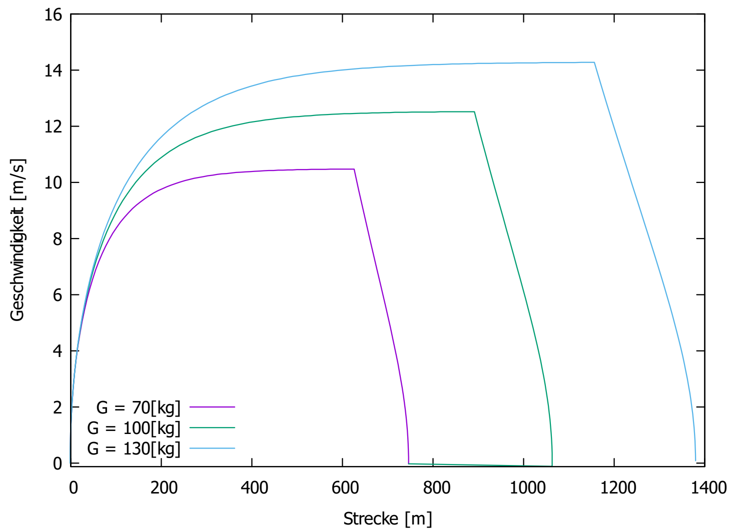


Abb. 3: Geschwindigkeit-Weg Diagramm für $G = 70, 100, 130\,kg$. Die Abfahrt mit 6% Gefälle ist der linke Teil der Kurve; sie beginnt mit $v = 0$ und erreicht, abhängig vom Gewicht, die durch (16) bestimmte Endgeschwindigkeit. Am Knick endet die Abfahrt, dann beginnt die Auffahrt, hier mit der moderaten Steigung von 2% (rechter Ast der Kurven). Sie endet, wenn $v = 0$. Der Übergewichtige ist im Vorteil: Er kann bergauf, ohne eigenes Zutun, eine deutlich größere Strecke zurücklegen.