Über das Fahrrad

Teil 1: Die Grundlagen

Volker Jentsch
http://www.volkerjentsch.de

April 2022, ergänzt Oktober -Dezember 2022

Kurzfassung

In Teil 1 des Artikels werden die einfachen Gesetze erläutert, die das Fahrrad regieren, also die Kräfte, die erbracht werden müssen, um das Rad zum Laufen zu bringen. Auffahrt und Abfahrt, sowie Fahrt bei windigem Wetter werden diskutiert und die physikalischen Gegebenheiten in berechenbare Größen übersetzt.

1 Einführung

Die Mechanik des Fahrrads scheint komplizierter als man glaubt. Das jedenfalls suggeriert die inzwischen gigantische Anzahl von Artikeln, Blogs und Videos im Internet [1]. Gleichwohl: die Mechanik des herkömmlichen Fahrrads ist elementare Newtonsche Mechanik. Dennoch gibt es die eine oder andere Spezialität, die nicht vom Himmel fällt, folglich mit Hilfe der Physik erklärt und der Mathematik berechenbar gemacht werden muß. Abgesehen davon, ist das Fahrrad ein vorzügliches Gerät zur Erkundung des Raums, so dass – selbst auf die Gefahr der Wiederholung bekannter Tatsachen – ich es für sinnvoll halte, die Mechanismen im Zusammenhang darzustellen. In der Absicht, zu erläutern, was im einzelnen abläuft, wenn sie oder er in die Pedale tritt.

Bekanntlich kommt die Physik nicht ohne Formeln aus, folglich habe ich einige im Text eingefügt. So können individuelle Daten errechnet und mit den experimentellen, von Rad-Computern, Smartphones oder selbstgebastelten Versuchsanordnungen verglichen werden.

Im aktuellen Teil behandele ich die Mechanik des herkömmlichen Fahrrads. Teil 2 ist den Besonderheiten des E-Bike gewidmet.

Wir haben es mit zwei Radfahrern zu tun: Frau A ist klein und wiegt $m_A = 50\,kg$. Und weil kleine Frauen große Männer mögen (das ist statistisch erwiesen) ist Herr B groß und bringt $m_B = 90\,kg$ auf die Waage (das Gesetz

[1] Ein anschaulich geschriebener Artikel findet sich in www.leifiphysik.de/mechanik

gilt auch in umgekehrter Richtung: große Männer bevorzugen kleine Frauen). Beide sind um die Vierzig, deshalb fahren sie das normale Bike. Sie nennen es „ehrlich", weil sie selbst der Motor sind. Tatsächlich verdanken sie die Bezeichnung einem Schweizer Bergfahrer, der sein motorloses Gefährt ein „ehrliches" nannte. Dass es nämlich auch „unehrlich" vergnüglich geht, nämlich Radfahren mit Unterstützung, darüber im Teil 2. Ihre Räder sind leicht, wiegen nicht mehr als $10\,kg$, so dass sich die effektive Masse (Rad plus Fahrer) für Frau A auf $m_A = 60\,kg$ und für Herrn auf $B : m_B = 100\,kg$ erhöht.

A und B müssen Widerstands-Kräfte überwinden, die der Fahrtrichtung entgegengesetzt sind. Auf ebener Strecke sind das in erster Linie Roll- und Luftreibung (inklusive windiges Wetter); interne Reibung von Lagern und Kette sind bei einem guten Fahrrad vernachlässigbar. Anders beim E-Bike, darüber später. Am Berg muss vor allem der sogenannte Hangabtrieb kompensiert werden, damit das Fahrrad vorwärts und nicht rückwärts läuft.

2 Reibungskräfte

Rollreibung entsteht, wenn das Rad sich mit dem Boden reibt, auf dem es bewegt wird. Die zu dessen Überwindung erforderliche Kraft ist proportional zum Gewicht $G = mg$ (Schwerebeschleunigung $g = 9.8\,m/sec^2$), das senkrecht zum Boden aufliegt. Handelt es sich um eine schräge Ebene, die zur Horizontalen den Winkel α bildet (siehe Abb.1), wird g durch $g\cos\alpha$ ersetzt:

$$K_R = \mu mg\cos\alpha \tag{1}$$

Der Reibungskoeffizient μ ist mehr oder weniger konstant und hängt ab von der Beschaffenheit des Bodens und von der Bereifung, wie Luftdruck, Größe, Gummimischung etc. Die Reibung auf glattem Asphalt ist gering, im Sand bekanntlich ermüdend hoch. Wählen wir im *Beispiel* 1 der Einfachheit halber den asphaltierten Grund. Dann erzeugt B einen Widerstand von etwa $4\,N$, wenn $\mu \approx 0.004$. N steht für Newton und ist die physikalische Einheit für Kraft. (Newton und Joule sind dasselbe – wenn es sich um die Einheiten der Kraft handelt). Läuft das Fahrrad auf holperigen Waldwegen, wird man wohl von mindestens $10\,N$ ausgehen müssen.
Die Luftreibung (oder dem Luftwiderstand) ist eine komplexe Angelegenheit. Hier kommt bekanntlich die Geschwindigkeit ins Spiel, mit der das Fahrrad bewegt wird. Sie geht quadratisch ein:

$$K_L = \kappa v^2 \tag{2}$$

Der Faktor $\kappa[kg/m]$ hängt ab von: der Kontur von Rad und Fahrer (man nennt das die „Stirnfläche" A), der Luftdichte ρ und dem Strömungswiderstand-Koeffizienten c_w. Letzterer ist nicht einfach zu bestimmen; er hängt ab von dem Typ und der Bauweise des Fahrrad und kann zwischen 0.4 und 1 variieren (Zum Vergleich: für moderne PKW liegt er bei 0.3):

$$\kappa = \frac{1}{2}c_w\rho A \tag{3}$$

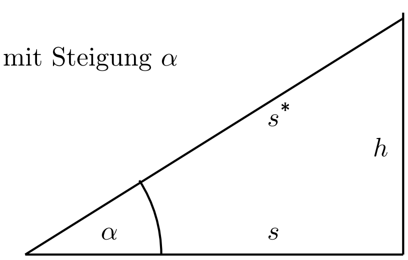
Der Faktor enthält also jede Menge Ungewissheiten; und weil er auch von der Konstruktion des Fahrrads abhängt, wird in Rennfahrer-Kreisen alles getan, um ihn zu minimieren. A und B gehören dieser Gruppe nicht an. Ihnen genügt die Aussage, dass aufgrund der Geschwindigkeitsabhängigkeit die Luftreibung bei höheren Geschwindigkeiten die Rollreibung übertrifft. Betrachtet man die beiden Widerstände als Funktion der Geschwindigkeit, ergibt sich bei glatter Bodenbeschaffenheit ein Wert von $20\,km/h$, oberhalb der die Luftreibung der (von v unabhängigen) Rollreibung davoneilt. Bei rauem Untergrund erhöht sich dieser Schwellwert. Gleichwohl: in der Ebene ist die Luftreibung der Widerstand, den es bei höherer Geschwindigkeit zu überwinden gilt. [2]

Als Fazit bleibt festzuhalten: A und B als passionierte, normal gewichtete und leidlich trainierte Fahrer, die vorwiegend im Schwarzwald bei eher wenig Gegenwind unterwegs sind, rollen bergauf mit Geschwindigkeiten eher unterhalb $15\,km/h$, so dass wir davon ausgehen können, dass ihnen die Rollreibung, wenn überhaupt, und nicht die Luftreibung zu schaffen macht.

3 Auffahrt

Während in der Ebene die Reibungskräfte dominieren, sind es am Berg oder der schiefen Ebene (siehe $Fig.1$) die Gravitationskräfte, welche die Radler her-

Fig. 1:
Rampe mit Steigung α



ausfordern.

Genau genommen ist es die Kraft, die aufgewendet werden muss, um der entgegengesetzt gerichteten Kraft, dem sogenannten Hangabtrieb, die Stirn zu bieten. Man nennt sie Hubkraft. Um zu verhindern, dass das Rad rückwärts statt vorwärts rollt. Die Berechnung dieser Kraft ist ein Standardbeispiel aus der technischen Mechanik und kann in jedem Physikbuch nachgelesen werden;

[2] Eine eingängige Herleitung der Luftreibung inklusive Einfluß des Windes findet sich in H.J.Schlichting und R.Nobbe, „Untersuchungen zur Energetik des Fahrrads“ (1983) sowie Schlichting und Backhaus, „Physik des Alltags am Beispiel der Energetik des Fahrrads “(1983).

die Schwerebeschleunigung g wird durch $g \sin \alpha$ ersetzt:

$$K_G = mg \sin \alpha, \tan \alpha = h/s \tag{4}$$

Die Formel sieht komplizierter aus, als sie ist. Weder A noch B werden eine Steigung oberhalb $h/s > 0.25$ bezwingen, was bekanntlich 25% entspricht (Zur Erinnerung: 100% impliziert $h = s, \alpha = 45^\circ$). Wenn die Steigung 25% nicht übersteigt, ist näherungsweise $\sin \alpha \approx \alpha$ (in Bogenmaß) und $\tan \alpha \approx \alpha$, mithin

$$K_G \approx mg(h/s) \tag{5}$$

Doch wer sagt uns, wie groß die Steigung tatsächlich ist, wenn kein Verkehrsschild die Zahl ausweist?? Dafür gibt es die GPS-gestützten Outdoor-Geräte oder Apps auf Smartphones.

Beispiel 2: Herr B erklimme eine Straße von 10%. Dann muss er eine Hubkraft von etwa $100\,N$ aufbringen, also deutlich mehr als die vorab besprochenen Reibungskräfte. Frau A ist auf Grund des geringeren Gewichts besser dran und muss nur $60\,N$ aufbringen. Was das Radfahren betrifft, ist das kleine Gewicht vorteilhafter als das große. Zumindest wenn es bergauf geht.

Zusammengefaßt: Die für's Bergauf-Fahren erforderliche Kraft K ist die Summe der Kräfte, die alle in die gleiche Richtung, sprich Fahrrichtung, zeigen

$$K = K_R + K_L + K_G \tag{6}$$

Nun wollen A und B nicht auf der Stelle stehen bleiben. Sie wollen vorwärts mit der Geschwindigkeit v. Das führt uns zum Begriff der Leistung und Energie.

4 Arbeit und Leistung

Letztlich ist es die Leistung, weniger die zu erbringende Kraft, die uns interessiert. Ganz im Sinne der sogenannten Leistungsgesellschaft. Leistung P (von P=power) ist Arbeit/Zeit. Arbeit W (von W=work) ist Kraft*Weg, sofern die Kraft in Richtung des Weges s^* zeigt (was beim Radfahren die Regel sein sollte). Mithin ist die von A oder B erbrachte Leistung P oder geleistete Arbeit W:

$$P = Kv, W = Ks^* \tag{7}$$

Vom Autofahren sind wir gewöhnt, die Geschwindigkeit in km/h zu messen. Fürs Radfahren wäre es besser, von m/s zu sprechen; $1\,m/s = 3.6\,km/h$. Und da wir gerade bei den Einheiten sind: Mechanische Arbeit wird in Nm angegeben; elektrische Energie in Wattsekunden (Ws) oder bei größeren Energiemengen (Fahrradbatterie) in Wattstunden (Wh) und Leistung in Watt (W):

$1\,Nm = 1\,Joule = 1\,Ws = 1/3600\,Wh$; $1\,Nm/s = 1\,W$, $1\,PS = 0.735\,kW$. Und $1\,Wh = 0.86\,kcal$.

Beispiel 3: B fährt in der Ebene auf Asphalt. Seine Geschwindigkeit kann sich sehen lassen: $v = 30\,km/h$. Die zu überwindende Reibung (Boden und Luft) erfordere eine Kraft von $20\,N$; folglich erbringt er eine Leistung P von $P = 20 * 30/3.6\,Nm/s$, also $P = 166\,Nm/s = 166\,Watt$.

Die in W enthaltene Arbeit gegen die Gravition (man nennt sie auch Hubarbeit) ist

$$W_G = K_G h \tag{8}$$

und ist unabhängig davon, auf welchem Weg und wie schnell A oder B den Höhenunterschied h überwunden haben. Diese Arbeit ist, sobald auf der Höhe H angekommen, in Fahrrad und Person als potentielle Energie gespeichert. Natürlich wollen A und B dort oben nicht für ewig bleiben; es ist also nützlich zu wissen, was bei der Abfahrt passiert.

5 Abfahrt

Ohne Reibung ist am Ende der Abfahrt bei $h = 0$ weder Energie gewonnen noch verloren; die potentielle Energie wird in kinetische Energie umgesetzt. Was passiert mit den Reibungs-Anteilen? Sie sind verlorene Energien, weil in nutzlose Wärme umgesetzt. Während beim Aufstieg aufgrund der geringen Geschwindigkeit v die Luftreibung von sekundärer Bedeutung ist, wird sie beim Abstieg relevant: sie ist die natürliche Bremse (als Fahrtwind fühlbar). Im stationären Zustand sind Reibung und Hangabtrieb im Gleichgewicht. Geschwindigkeit und Weg als Funktion der Zeit errechnen sich mit Hilfe der im *Anhang* gegebenen Formeln.
Beispiel 4: Frau A fährt eine $s^* = 5\,km$ lange Abfahrt ohne nennenswerte Kurven; das durchschnittliche Gefälle beträgt 6.3%, es herrscht Windstille. Der Luftwiderstand sei $0.35 kg/m$. Sie möchte vorab wissen, wie lange sie braucht, bis sie unten ankommt. Und hier ist die Antwort. Nach etwa 460 Metern und 53 Sekunden hat sie ihre Endgeschwindigkeit von $41.27\,km/h$ erreicht. Sie benötigt, wenn sie durchhält und nicht bremst, etwa 450 Sekunden, bis sie unten ist. Wie sieht es bei ihrem Partner aus? Er ist wegen der größeren Masse deutlich schneller als seine Frau. Nach etwa 900 Metern hat er seine Endgeschwindigkeit von $47.5\,km/h$ erreicht. Er würde etwa eine Minute warten müssen, bis er A mit Küßchen begrüßen kann. Herr B wirft ein, dass ohne Rechnung unmitttelbar einsichtig sei, dass der Energiegewinn am Ende der Gefällstrecke gerade gleich der Kinetischen Energie $E_{kin} = (m/2)v_\infty^2$ ist, mit v_∞ aus Gleichung (14). Allerdings sei dieser unbedeutend klein. Für ihn ergäbe sich ein Gewinn von schlappen $2.4\,Wh$, für seine Frau noch weniger, nämlich $1.3\,Wh$. Das liege daran, dass nach kurzer Zeit keine Kraft mehr wirke, sie werde durch die Luftreibung aufgezehrt. Das Rad sause dann mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gen Tal.
Recht hat er. Wie sich bei der Abfahrt Energie zurückgewinnen läßt, wird in Teil 2 besprochen. Wer all das nachrechnen will, oder die Situation mit anderen Zahlen füttern will, nehme den *Anhang* zu Hilfe. Die Beschleunigungsphase der Abfahrt ist in *Abb.*2 illustriert.

6 Der Wind, der Wind, das himmlische Kind

Frau A beklagt sich zu recht, dass in keiner der zahlreichen Artikel über Fahrräder der Wind eine Rolle spiele. Dabei sei er es doch, der sich einer zügigen Fahrt in den Weg stelle. Sie kommt aus Kiel und hat dort, so zumindest in der Erinnerung, stets Gegenwind beim Fahren aushalten müssen (Übrigens einer der Gründe für sie, in den windärmeren Südwesten umzusiedeln). Sie hatte damals den Eindruck, dass sie Berge hochfahre, so stark blies der Wind von vorne. Ihre Frage: welchen Berg hätte ich geschafft, wenn Wind im Flachen gegen Windstille am Berg getauscht wird?
Wir begnügen uns hier mit Wind von vorn (Gegenwind) und Wind von hinten (Rückenwind). Die Lösung: In (2) wird v^2 durch v_*^2 ersetzt:

$$v_*^2 = (v \pm v_w)^2 \tag{9}$$

wobei das $(+)$ Zeichen für Gegenwind und das $(-)$ Zeichen für Rückenwind steht, und v_w die Stärke des Windes in $[m/s]$ angibt.[3]
Beispiel 5: Zurück zu Frau A. Sie fährt in ebenem Gelände mit $v = 20\,km/h$; der Wind bläst von vorne mit $v_w = 15\,km/h$. Der Faktor κ in (3) sei $0.35\,kg/m$. Folglich erbringt sie bei einer Rollreibung mit $4\,N$ die Kraft $K = 37\,N$, ihre Leistung ist $205\,W$. Bei Windstille würde sie bei gleicher Leistung eine Geschwindigkeit von $29\,km/h$ erreichen. Würde sie umdrehen und nunmehr in den Genuß des Rückenwinds kommen, würde sie, gleiche Leistung vorausgesetzt, die beachtliche Geschweindigkeit von $v = 40.5\,km/h$ erreichen. Würde der Wind stark genug sein, müßte A nichts tun; sie wäre die Beifahrerin und der Wind der Fahrer. Dann ist$v^2 = v_w^2 - K_R/\kappa$; die zur Überwindung der Rollreibung erforderliche Kraft würde durch den Wind erbracht. Ein wohl eher seltener Fall, der wenn überhaupt, nur an der Küste anzutreffen ist. Aber Spaß dürfte gewiß sein.
Würde A ohne Wind in bergigem Land fahren, würde die Kraft für eine Steigung von etwa 5.4% ausreichen (Eine andere Frage ist, wie lange sie das durchhalten würde). [4]

7 Beschleunigung

Hier geht es darum, die Kraft zu errechnen, die erforderlich ist, um z.B. das Fahrrad von Null auf eine Geschwindigkeit $v > 0$ zu beschleunigen. Der dafür erforderliche Kraftaufwand berechnet sich nach $K = mb$; hier ist $b = dv/dt$ die Beschleunigung des Rads, also dessen Geschwindigkeitszuwachs pro Zeit.
Beispiel 6: Herr B fahre auf ebenem Grund an. Sei $v(t = 0) = 0, v(t = 3sec) = 20\,km/h$. Dann ist $dt = 3\,sec, dv = 5.6\,m/s$, folglich die Beschleunigung $b =$

[3] Sollte der Wind von der Seite kommen, müssen Wind und Geschwindigkeit vektoriell addiert werden. Aus (9) wird dann $v_*^2 = (v + v_w \cos\epsilon)^2$ mit $\epsilon = 0$ bei Gegenwind.

[4] Alle Zahlen in diesem Beispiel sind natürlich vom Wert abhängig, der κ zugeschrieben wird.

$1.85\,m/s^2$, mithin die enorme (wenn auch meist nur kurzfristig wirkende) Kraft $K = 185\,N$.

8 Entfaltung

Egal ob mit oder ohne Motor, ein wichtiges Merkmal jeden Fahrrads ist die Gangschaltung, bestehend aus Kettenblättern oder Kettenblatt an der Kurbel und den Ritzeln am Hinterrad. Das Verhältnis der beiden bestimmt den Weg S, den das Hinterrad mit Umfang U bei einer Kurbelumdrehung zurücklegt:

$$S = Un_K/n_R \tag{10}$$

erzielt wird.

Beispiel 7. Das Fahrrad von A (und gleichermaßen von B) sei ausgestattet mit einer Kassette, die Ritzel mit $n_R = 10 - 42$ Zähnen enthält, sowie einem Kettenblatt an der Kurbel mit $n_K = 15$ Zähnen. Das ergibt Übersetzungen von 1.5 bis 0.36. Eine Kassette mit $n_R = 10 - 51$ Zähnen, Kettenblatt mit $n_K = 34$ Zähne ergibt Übersetzungen von 3.4 bis 0.67. Multipliziert man die Übersetzungen mit dem Umfang des Reifens, also etwa $U = 2.2\,m$, erhält man die Entfaltung in Metern. Eine interessante Erweiterung ist die Umrechnung der Entfaltung in Geschwindigkeit. Dazu braucht man die Trittfrequenz f, welche die Anzahl der Umdrehung der Kurbelachse pro Minute angibt. Diese muss in die Winkelgeschwindigkeit ω umgerechnet werden, $\omega = (f/60)2\pi$. Dann ist v (in m/s)

$$v = S\omega \tag{11}$$

Bei hoher Entfaltung (z.B. $6\,m$) und normaler Kurbelei ($f = 60/min$), ergibt sich gemäß (7) eine Geschwindigkeit $v = 37.7\,km/h$. Bei niedriger Entfaltung (z.B. $2\,m$) müsste man die Kurbel dreimal schneller drehen, um die gleiche Geschwindigkeit zu erreichen. Was schlechterdings unmöglich ist. Anders herum wird ein Schuh draus. Bei gleicher Trittfrequenz würde eine Geschwindigkeit von etwa $12.5\,km/h$ erreicht, gut genug für eine 8-10%ige Steigung. So lassen sich über die Wahl der Übersetzung Geschwindigkeit und Vortrieb regulieren, mithin die zu erbringende Kraft bzw. Leistung. Naturgemäß auch das Drehmoment M[5].

9 Drehmoment

Da das Fahrrad nur durch beständiges Pedalieren fährt, die relevante Bewegung also eine rotierende ist, kommt neben Kraft, Arbeit und Leistung eine weitere wichtige Größe in der Fahrrad-Mechanik ins Spiel, das Drehmoment. Alle diese Größen sind miteinander verknüpft. Je größer das Drehmoment, umso heftiger der Antrieb. Wirkt die Kraft senkrecht zum Hebelarm r (Abstand Kurbelachse zum Pedal), so ist das Drehmoment des Motors an der Kurbel $M = Kr$. Die Leistung errechnet sich aus

$$P = M\omega. \tag{12}$$

[5] dazu R.Paschotta: „Ratgeber E-Bikes“ https://www.energie-lexikon.info/ebike.html

Das Drehmoment ändert sich wie beim Auto mit ω; meist ist M maximal für ein bestimmtes ω. Hier ist folgendes Szenario von Belang. A fahre mit $f = 60/min$ und $P = 250\,N$. Das ergibt nach (8) ein Drehmoment von gerade mal knapp $40\,Nm$. An dieser Stelle greifen wir Teil 2 vor und betrachten das *E-Bike*, das sich durch große Drehmomente auszeichnet. Die Firma Bosch spendiert bis zu $85\,Nm$. Würde B (oder A) das Moment durch geeignete Übersetzung ausreizen, bei weiterhin angenommener Trittfrequenz von $f = 60/min$, würden beide eine Leistung von $534\,W$ erzielen! Mehr darüber in Teil 2.

Bleibt noch die Frage, wie kleines oder großes Antriebsmoment zustande kommt. Ganz einfach: mit Hilfe der Gangschaltung (Entfaltung!) wird zwischen kleinem und großem Ritzel das Drehmoment an der Hinterachse rauf- bzw. runter geschaltet.

10 Zusammenfassung

Eigentlich ist alles doch recht elementar: Fahrerin/ Fahrer erzeugt mittels Muskelkraft ein Drehmoment auf die Antriebsachse, das über Kettenblatt-Kette-Ritzel auf das Hinterrad geleitet wird. Aufgrund der Haftreibung zwischen Rad und Boden setzt sich das Fahrrad in Bewegung. Das Fahrrad wird beschleunigt, bis es die gewünschte Geschwindigkeit erreicht. Dabei sind Rollreibung, bei höherer Geschwindigkeit Luftreibung und am Berg der Hangabtrieb zu überwinden. Bergab geht es dann anders herum: der Hangabtrieb ermöglicht ein kräftesparendes Fahrerlebnis. Etwas komplizierter ist der Einfluß des Windes. Geht es aber nur um Rücken- bzw Gegenwind, sind die Änderungen der Kräftebilanz auch intuitiv leicht verständlich.

11 Anhang

Die Dynamik der Abfahrt auf einer Rampe gleichmäßigen Gefälles ($\alpha \ll 90^\circ$) ähnelt dem Problem des freien Falls ($\alpha = 90^\circ$). Die beschleunigte Bewegung im Gravitationsfeld der Erde geht alsbald aufgrund der Luftreibung in eine gleichmäßige über; die resultierende Geschwindigkeit ist umso kleiner, je geringer die fallende Masse ist (man denke an eine Vogelfeder).
Mathematisch handelt es sich um eine DGL vom Riccatischen Typ; die Nichtlinearität ist von quadratischer Natur (v^2) Die Rampe sei gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt. Windstille vorausgesetzt, folgt

$$m\dot{v} = K_G(\alpha) - K_R(\alpha) - K_L \tag{13}$$

wobei v positiv in Fahrtrichtung, also abwärts, gesetzt wird. Daraus ergibt sich (mit Hilfe der in Abschnitt 1 bzw. Abschnitt 2 beschriebenen Kräfte) sofort als partikuläre Lösung die stationäre Geschwindigkeit v_∞ ($\kappa > 0$):

$$v_\infty = \sqrt{(K_G - K_R)/\kappa} \tag{14}$$

Was sagt uns (15)? Die widerständige Luft verhindert ein unbegrenztes Anwachsen der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ist

$$v(t) = v_\infty \tanh x \tag{15}$$

wenn $v(t = 0) = 0$ und $x = (t/m)\sqrt{(K_G - K_R)\kappa}$. Integration von v nach t ergibt das Weg-Zeit Gesetz für die Abfahrt unter Berücksichtigung von Roll- und Luftreibung:

$$s(t) - s_0 = (m/\kappa) \ln \cosh x \tag{16}$$

So ist unmittelbar ersichtlich, dass nach geraumer Zeit, gleichbedeutend mit $x >> 1$, die beschleunigte Bewegung asymptotisch in eine gleichmäßige mit der Geschwindigkeit v_∞ übergeht.[6] Eine naheliegende Erweiterung der Abfahrt ist das Ausrollen des Fahrrads, wenn die abschüssige Straße in eine ansteigende (inklusive ebene) ausläuft. Der Anstieg werde durch den Winkel $\delta \geq 0$ beschrieben. Die Fragestellung lautet: Wie weit komme ich, wenn ich, ohne eigenes Zutun, mit der am Berg gewonnen Geschwindigkeit mein Fahrrad bis zum Stillstand ausrollen lasse? Hier ist die Antwort.

Für den Auslauf gilt

$$m\dot{v} = -K_G(\delta) - K_R(\delta) - K_L \tag{17}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass $\dot{v} \leq 0$. Die Lösung der nichtlinearen Gleichung kann in Kenntnis von (15) erraten werden:

$$v(t) = v^* \frac{v_0 \cos(\omega t) - v^* \sin(\omega t)}{v^* \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t)} \tag{18}$$

mit $v^* = f(\alpha)\sqrt{m\mu g/\kappa}$, $\omega = f(\alpha)\sqrt{\kappa\mu g/m}$ und $f(\alpha) = \sqrt{\sin(\alpha)/\mu + \cos(\alpha)}$. Integration von (18) liefert

$$s(t) - s_0 = \frac{m}{\kappa} ln(\cos \omega t + \frac{v_0}{v^*} \sin \omega t) \tag{19}$$

Aus (18) ergibt sich die Zeit T, die verstreicht, bis das Rad zum Stillstand ($v(T) = 0$) kommt:

$$T = \omega^{-1} \arctan(v_0/v^*) \tag{20}$$

Die Luftreibung ist essentiell; im Grenzfall $\kappa = 0$ sind s und T unabhängig vom Gewicht (m); Wie weit rollt das Fahrrad? Diese Frage wird mit (19) beantwortet, wenn $t = T$:

$$s(T) - s_0 = \frac{m}{2\kappa} \ln(1 + (v_0/v^*)^2) \tag{21}$$

Beispiel: Gegeben sei $\kappa = 0.35\,kg/m$, $\mu = 0.004$; $s_0 = 0$, $m = 100\,kg$ und ein geringer Anstieg von 2%. Die durch eine 10% - Neigung erzeugte v_0 ist $16.3\,m/s$.

[6] Sollte die Rampe nicht gleichmäßig fallen, also $y'(x) \neq constant$, muss in (13) α durch $\arctan y'(x)$ an der Stelle $x = s$ ersetzt werden. Die Strecke s ist dann die Bogenlänge der Kurve, gerechnet von $x = 0$. Dann gibt es keine analytische Lösung; in diesem Fall muß (13) numerisch gelöst werden.

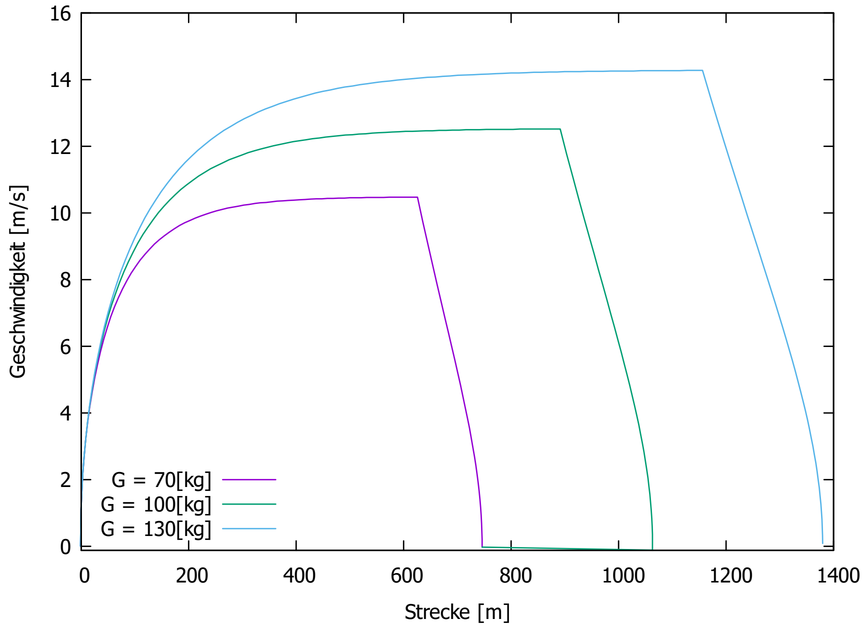


Abbildung 1: Geschwindigkeit - Weg Diagramm für $G = 70, 100, 130\,kg$. Die Abfahrt mit 6% Gefälle wird im linken Teil der Kurven abgebildet; sie endet am *Knick*. Erwartungsgemäß benötigt der übergewichtige Fahrer einer längere Strecke, um seine Maximalgeschwindigkeit v_{max} zu erreichen als der untergewichtige. Sie ist aber im Endeffekt größer als die des Untergewichtigten. Am *Knick* beginnt die Auffahrt, hier mit moderaten 2% Steigung. Sie endet, wenn die Geschwindigkeit $v = 0$. Auch hier ist der Übergewichtige im Vorteil: Er kann ohne eigenes Zutun eine größere Strecke bergauf zurücklegen.

Dann ist $T = 38.5\,sec$ und $s(T) = 229.2\,m$ (für andere Konstellationen: probiere den *Rampenrechner* (`http://volkerjentsch.de/Rampen-Rechner.html`). Ohne Luftwiderstand, bei gleichem v_0 würde die Auffahrt anders aussehen: $T = 117\,sec$ und $s(T) = 459\,m$!
Abfahrt und Auslauf sind für verschiedene Gewichte in Abb. 1 illustriert.

Eine Abwandlung der Abfahrt-Auffahrt ist deren Wiederholung. Gehen wir von folgender Konstellation aus. Herr (H) tritt gegen ♥Dame (D) an. H wiege $m_H = 130\,kg$, D wiege $m_D = 75\,kg$ (jeweils inklusive Rad von $25\,kg$). Roll- und Luftreibung seien der Einfachheit halber für beide gleich. H und D fahren einen Hang hinunter und kommen durch geschickte Manipulation mit gleicher Geschwindigkeit unten ($z = 0$) an. Von dort es geht ohne Pause (und ohne eigenes Zutun, also stehenden Pedalen) auf schiefer Ebene mit Steigung δ bergauf; anschließend auf schiefer Ebene mit Gefälle α wieder bergab, und das wird solange wiederholt, bis die verfügbare Energie vollständig durch Reibung aufgezehrt ist. Die jeweiligen Umkehrpunkte sind durch $v = (0, v_{max})$ respektive $z = (z_{max}, 0)$

gekennzeichnet. Was voraussetzt, dass eine unsichtbare Hand die Strecke derart arrangiert, dass sie mit den Umkehrpunkten übereinstimmt. Diese werden mit Hilfe von (13)-(21) errechnet. Physikalisch wird beim *Auf* kinetische in potentielle Energie und beim *Ab* potentielle in kinetische Energie umgesetzt, allerdings unter Verlust, hervorgerufen durch Roll- und insbesondere Luftreibung. Somit konvergieren bei Wiederholung des Prozesses die Maxima kontinuierlich gegen $z_{max} = 0$. **Nun die Preisfrage**: Welches Fahrrad rollt länger, D oder H? [7]
In den Abb. 2 - Abb. 4 sind die Folge der Maxima für verschiedene Parameter dargestellt. Der Einfluß der Luftreibung ist evident, siehe Abb.4. Alle Experimente starten mit der Geschwindigkeit $v_0 = 15m/s$. Eine Vielzahl weiterer Experimente bietet sich an; dabei hilft das Rampen-Spiel (http://volkerjentsch.de/Rampen-Spiel.html). Weiteren mathematisch-physikalischen Übungen, wie z.B. die Bestimmung der durch die Maxima definierten Kurve, steht folglich nichts im Wege.

[7] Hinweis: Nur die durch den Widerstand der Luft hervorgerufene Verzögerung der Bewegung ist abhängig von der Masse: $\dot{v} \propto -\kappa/m$. Je größer die Masse, umso kleiner die Verzögerung, umso länger unterwegs! Multiplizieren Sie κ_H mit m_H/m_D und halten κ_D beim aktuellen Wert. Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Fälle...

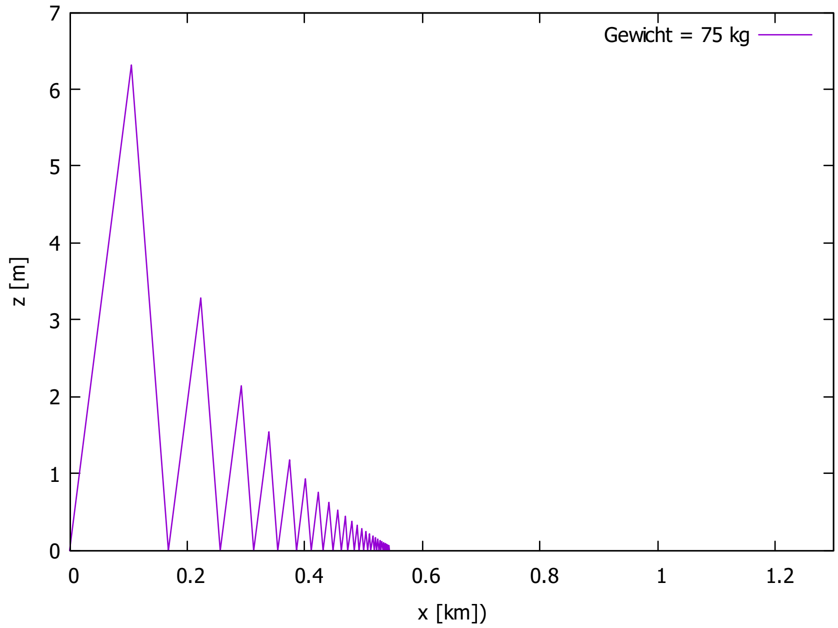


Abbildung 2: Fahrrad F: Höhe $z(t)$ gegen Horizontale $x(t)$, für $\kappa = 0.35\,kg/m$ und $m = 75\,kg$

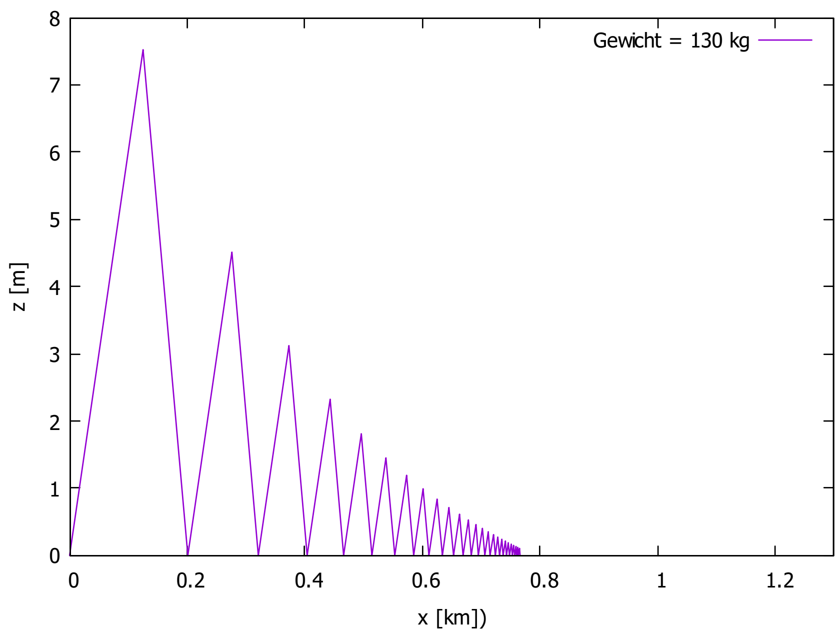


Abbildung 3: Fahrrad H: Höhe $z(t)$ gegen Horizontale $x(t)$, für $\kappa = 0.35\,kg/m$ und $m = 130\,kg$

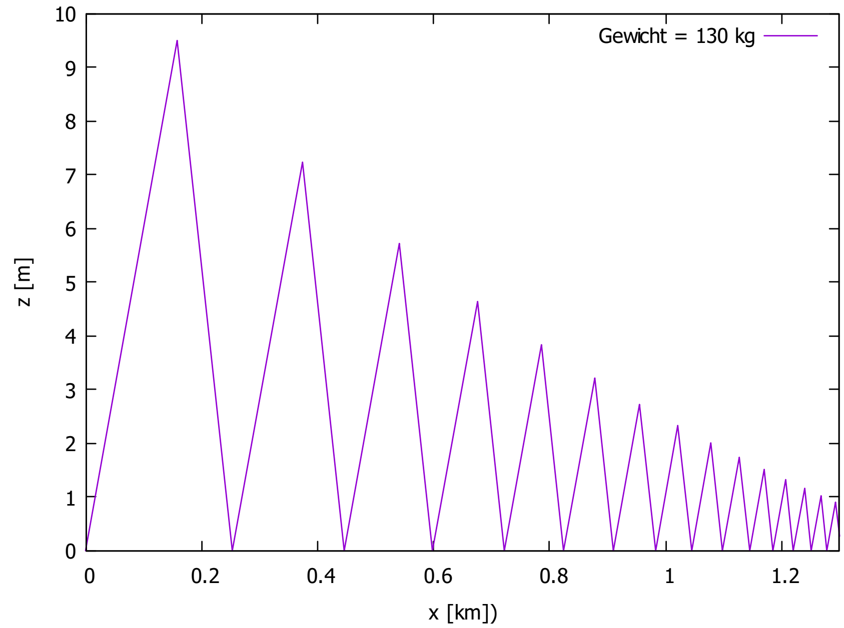


Abbildung 4: Fahrrad H: Höhe $z(t)$ gegen Horizontale $x(t)$, für $\kappa = 0.1\,kg/m$ und $m = 130\,kg$