

# Herzfrequenz unter Last: Experiment versus Modell

Volker Jentsch

Februar 2021

Die Antwort des Körpers auf Belastung ist vielfältig; sie beeinflusst Atmung, Stoffwechsel, Sauerstoff-Aufnahme, Muskulatur, Kreislauf und Herz, also Schlagvolumen, Blutdruck und Frequenz. Die Änderung der Herzfrequenz  $HF$  ist die wohl auffälligste Reaktion unter Belastung. Sie lässt sich relativ einfach durch manuelles Abtasten am Handgelenk ermitteln. Genauere Messungen gelingen mit den Fahrrad-Ergometern in den kardiologischen Arztpraxen. Aber selbst die heute weit verbreiteten Fitness-Tracker oder (GPS-fähigen) Outdoor-Uhren liefern brauchbare Resultate. Ich habe meine Frequenzen mit Hilfe der Geräte von Garmin und Suunto aufgezeichnet. Zwei in den Brustgurt eingearbeitete Elektroden registrieren den Abstand  $RR$  zweier aufeinander folgenden R-Zacken im EKG. Die Herzfrequenz  $HF$  ist dann einfach  $HF = 60/RR$ , [ $HF$ ]=Herzschläge/min. Durch den festen Sitz des Gurtes werden Artefakte, die u.a. durch Verrutschen der Sensoren entstehen, in Grenzen gehalten. Das Signal wird an das Gerät gesendet, von diesem analysiert, geglättet und gespeichert. Am Ende der Übung lässt sich die Herzfrequenz in Form einer Zeitreihe graphisch oder numerisch ausgeben.

Artikel über Irregularitäten der Herzfrequenz im stationären, unbelasteten Zustand gibt es viele. Zahlreiche Beispiele finden sich, zum Beispiel, in *Physical Review*, *Journal of Mathematical Physics* und diversen Medizinischen Zeitschriften. Man interpretiert die Herzfrequenz als stochastischen Prozess und modelliert sie in Form einer stochastischen Differentialgleichung oder (auf der Grundlage vom Messungen) als stationäre, quasi kontinuierliche Zeitreihe. Artikel über die Herzfrequenz unter *Last*, insbesondere die Antwort des Herzens auf sich ändernde Last, sind dagegen selten (de facto weiß ich von keiner, ich entschuldige die Ignoranz). Hier handelt es sich um einen wesentlich deterministischen Prozess, bei dem statistische Schwankungen eine untergeordnete Rolle spielen.

## 1 Methode

Auf Tour gemessene Herzraten sind für eine quantitative Analyse nicht geeignet. Denn der Stimulus, durch Steigung oder Gegenwind repräsentiert, ist nur unge-

nau als Arbeitsleistung reproduzierbar. Insofern ist es angeraten, die Experimente ähnlich wie beim bekannten Belastungs-EKG vorzunehmen. Die Testperson setzt sich auf einen Fahrrad-Ergometer und pedaliert bei gleichbleibender Trittfrequenz, gegen die durch eine Art Wirbelstrombremse hervorgerufene, wohl definierte Belastung. Aufgezeichnet wird die Herzfrequenz in äquidistanten zeitlichen Abständen. Die Belastung kann stufenweise erhöht oder auch verringert werden. Ergebnis meiner Untersuchung sind Zeitreihen, in denen die Herzfrequenzen als Funktion des Antriebs über eine längere Zeitspanne aufgezeichnet wurden. Als Beispiel mögen die Zeitreihe eines 68-jährigen, leidlich trainierten Probanden **A** dienen (siehe Abb.1).

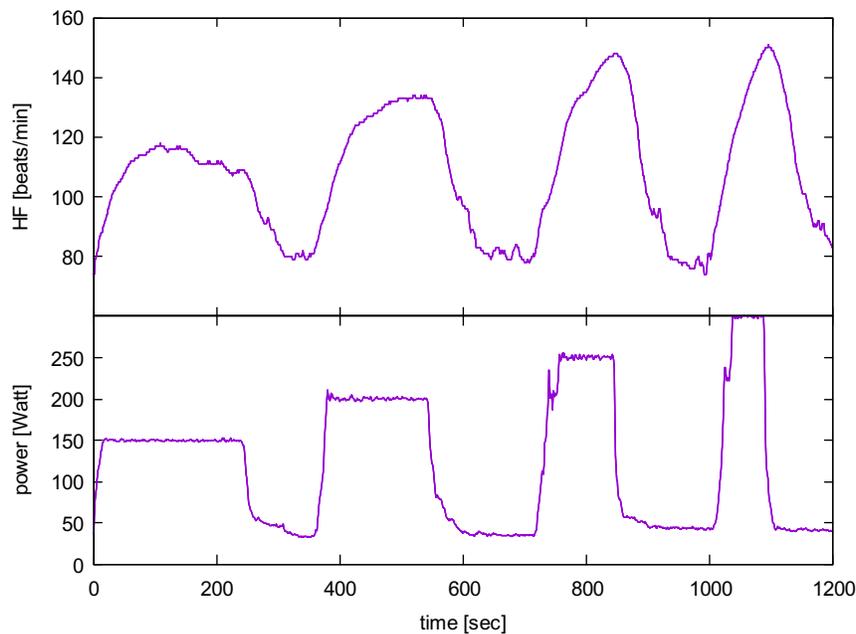


Abbildung 1: Herzfrequenz ( $HF$ , oben) und dazugehörige Leistung (unten) als Funktion der Zeit, für Proband **A**

Vor jedem Versuch wurde das Gerät justiert. Zu diesem Zweck wurde mit gleichmäßiger Frequenz so lange pedaliert, bis der Proband eine wohldefinierte Bremsleistung des Ergometers durch die eigene Leistung egalisiert. Das eigentliche Experiment bestand dann aus 3 Stufen – 125 bzw. 150, 200 und 250 Watt, die für jeweils zwei oder mehr Minuten gehalten werden mussten; dazwischen wurde eine Erholungsphase mit Rückkehr in den Ausgangszustand eingelegt. Die Herzfrequenz-Leistungsdaten wurden äquidistant, und zwar im Abstand von einer Sekunde aufgezeichnet. Eine noch höhere Stufe (300 Watt) wurde nur kurzzeitig eingeschaltet, da die erforderliche Herzfrequenz, die für einen stationären Zustand erforderlich war, von **A** über längere Zeit nicht mehr erbracht werden konnte.

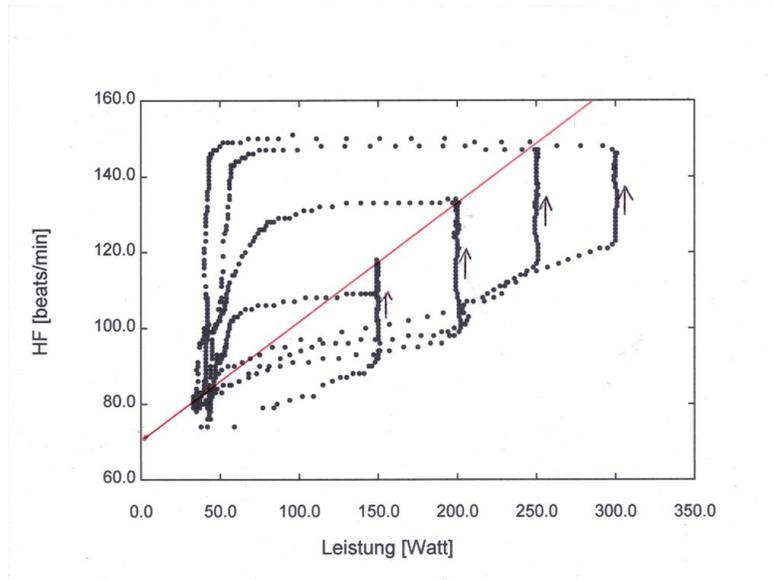


Abbildung 2:  $HF$  versus Leistung für Proband **A**. Zeit in Abb.2 zeigt in Richtung der Pfeile. Der Abstand zwischen den Messpunkte beträgt 1 Sekunde. Die rote Gerade approximiert  $HF = HF(Q^*)$  im Gleichgewicht – siehe unten.

Die Zu- bzw. Abnahme der Herzfrequenz in Abhängigkeit des Antriebs ist dem bekannten Lade- und Entladungsvorgang eines Kondensators beim Ein- bzw. Abschalten einer Stromquelle ähnlich. Durch die Arbeit gegen den Widerstand des Ergometers wird das Herz „aufgeladen“, und die Herzfrequenz nimmt zu, bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Sobald dieser erreicht ist, wird der Widerstand abgeschaltet. Das Herz beginnt sich zu „entladen“, und die Frequenz fällt auf den Ausgangswert ab. Die dafür charakteristische Zeit wird als Relaxationszeit bezeichnet.

Das System besitzt zwei Zeitskalen; die eine ist die schon erwähnte Relaxationszeit, mit der die Herzfrequenz graduell auf Be- und Entlastung reagiert; die andere ist eine Art Gedächtniseffekt des Herzens: das Herz nimmt sich Zeit, bevor es auf eine Änderung im Antrieb reagiert. Wie aus Abb.2 hervorgeht, nimmt diese durch die Last induzierte Verzögerung mit der Herzfrequenz zu. Sie erreicht bei 300 Watt einen Wert von etwa 20 Sekunden.

Die Herzfrequenz-Leistungs-Kurve (Abb.2 ) beschreibt eine Art Hystereseschleife, ähnlich der Magnetisierungskurve von Eisen im äußeren Magnetfeld, mit dem Unterschied, dass es keine Remanenz gibt, die Herzfrequenz also für einen genügend langen Beobachtungszeitraum den Ausgangswert erreicht.

## 2 Das Model

Um den zugrunde liegenden Prozess mit einfachen Mitteln zu modellieren, nehme ich an, dass sich die Herzfrequenz kontinuierlich mit der Zeit ändert. Dann sind gewöhnliche Differentialgleichungen, wie aus Wachstums- oder Zerfallsprozessen bekannt, das Mittel der Wahl:

$$a\dot{y}(t) = -y(t) + bQ^*(t - \tau) \quad (1)$$

$$y(0) = y_{start} \quad (2)$$

Hier ist:  $y(t) = ((HF)(t) - (HF)_0)/(HF)_0$ ,  $(HF)_0$  der Ruhepuls,  $t$  die auf Sekunden normierte Zeit,  $a$  die Relaxation- oder Halbwertszeit,  $Q^*$  der Stimulus bzw. Antrieb (in Watt),  $b$  (in  $1/Watt$ ) ein Maß für die Sensitivität des Herzens auf Belastung und  $\tau$  die von der Herzfrequenz abhängige, diskrete Verzögerung, für der Einfachheit halber als linear angenommen wird:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & y \geq y_m \\ 0 & y < 0 \\ \tau_0(y/y_m) & sonst \end{cases} \quad (3)$$

mit  $y_m = const$  (siehe unten). Anzumerken ist, dass  $\tau$  von Proband zu Proband verschieden ausfallen kann, dass insbesondere die Verzögerung auch schon bei niedrigem  $HF$  einsetzt, vielleicht sogar  $\tau = const$  für alle  $y$ .

Die Lösung von (1) bietet bei konstanter Last keine größeren Schwierigkeiten. Wenn also z.B.

$$Q^*(t) = \begin{cases} Q & t \leq T \\ 0 & sonst \end{cases} \quad (4)$$

dann ist die Lösung die bekannte exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallskurve:

$$y(t) = \begin{cases} y_{start} \exp(-t/a) + bQ(1 - \exp(-t/a)) & t \leq T + \tau_s \\ bQ(\exp(-t + T + \tau_s)/a) - \exp(-t/a) & sonst \end{cases} \quad (5)$$

wo  $\tau_s = \tau(y_s/y_m)$  und  $y_s$  die stationäre Lösung von (1) ist:

- $Q^* = 0 : y_s = 0$  oder  
 $(HF)_{stat} = (HF)_0$ ;
- $Q^* = Q : y_s = bQ$  oder  
 $(HF)_{stat} = (HF)_0(1 + bQ)$

Im Gleichgewicht unter Last (was eine genügend lange Dauer einer konstanten Last voraussetzt) ist also die Herzfrequenz proportional zur Last. Die

Konstante  $b$  ist, wie schon oben angedeutet, ein Maß für die Sensitivität des Herzens;  $d(HF)_{stat}/dQ = b(HF)_0$ . Mithin ist

$$b(HF)_0 = ((HF)_m - (HF)_0)/Q_m \quad (6)$$

Hier ist  $y_m$  bzw  $(HF)_m$  die vom Alter der Versuchsperson abhängige maximale  $(HF)$ ,  $(HM)_m = 220 - \text{Alter}$  und  $Q_m$  die unter der altersbedingten maximalen  $(HF)_m$  erreichbare Leistung. Die Gleichgewichtssituation  $(HF)_{stat}$  versus  $Q$  ist als rote Linie in Abb.2 eingezeichnet. So wird ersichtlich, dass beim aktuellen Probanden (**A**) die Leistung von 300 Watt eine Herzfrequenz von 160 Schlägen/min erforderte, um den stationären Punkt zu erreichen. Das war **A** aufgrund seines Alters aber nicht möglich.

### 3 Simulation

Für beliebige, insbesondere zeitabhängige Last  $Q^*(t)$  kann Gleichung (1) nur numerisch gelöst werden. Dafür approximiere ich  $\tau$  durch ganze Zahlen  $INT(\tau)$ , so dass die zurückliegenden Werte des Antriebs (die in äquidistanter Reihenfolge vorliegen) mühelos zu finden sind. Die diskretisierte Gleichung (1) lautet folglich

$$a(y(k+1) - y(k))/\delta = -y(k) + bQ(k - INT(\tau)/\delta), k = 1, \dots \quad (7)$$

wenn  $\delta$  die Abtastzeit (hier 1 Sekunde) ist.

Die Parameter  $a, b$  und  $\tau_0$  hängen vom Alters und der Verfassung der Testperson ab. Für Proband **A** ergibt sich: eine maximale Herzfrequenz von  $(HF)_m = 152/min$ , ein Ruhepuls von  $(HF)_0 = 60/min$ , eine maximale Leistung von  $Q_m \approx 276 \text{ Watt}$  und eine Sensitivität von  $b(HF)_0 = 0.333/(Watt \text{ min})$ . Alle diese Werte sind Abb.2 und der dort eingezeichneten Geraden zu entnehmen.

Mit Hilfe dieser Parameter können die für eine komplette Reproduktion der Herzfrequenz-Leistungskurve die noch fehlenden Größen  $a$  und  $\tau$  optimiert werden: die Relaxationszeit wird auf  $a = 30 \text{ sec}$ , die Verzögerung auf  $\tau_0 = 22 \text{ sec}$  geschätzt. Das Ergebnis der Simulation kann in Abb.3 besichtigt werden.

Größere Abweichungen gibt es im unteren Frequenzbereich. Möglich, dass hier stochastische Effekte eine Rolle spielen oder eine Art Fatigue-Effekt, der die Relaxationszeit verändert.

Eine ähnliche Parameterkonstellation ergibt sich für einen gleichaltrigen, ebenfalls leidlich trainierten Probanden **B**. Die relevanten Werte sind:  $a = 28 \text{ sec}$ ;  $\tau_0 = 18 \text{ sec}$ . In Abb.4 sind die Meßergebnisse, und in Abb.5 die Simulation für Proband **B** eingezeichnet. Auch für **B** gelten die für **A** geltenden Einschränkungen; er schafft, altersbedingt, die 300 Watt nicht (mehr).

### 4 Fazit

- Die Gleichgewichtspunkte der Herzfrequenz sind eine lineare Funktion der vorgegebenen Last. Für Lasten, die eine Herzfrequenz fordern, die höher

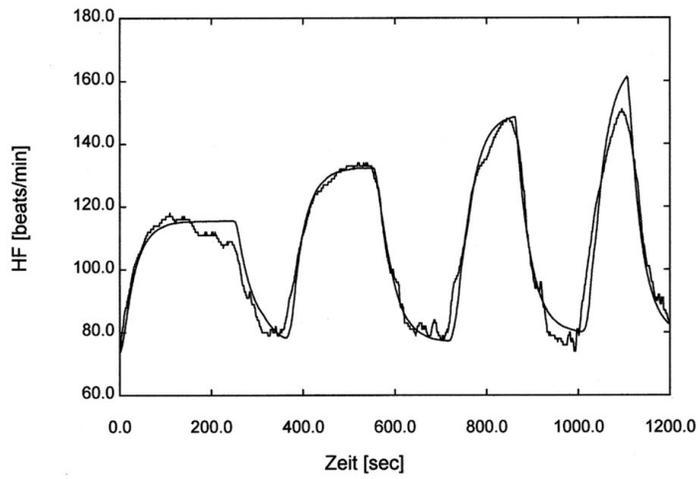


Abbildung 3: Vergleich  $HF(exp)$  gegen  $HF(sim)$ ; Proband **A**. Die glatte Kurve ist das Ergebnis der Simulation.

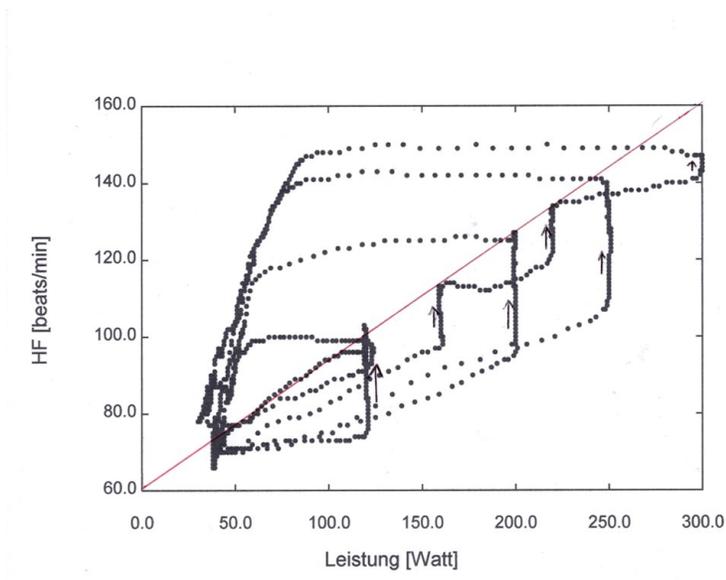


Abbildung 4:  $HF$  versus  $Q$ ; Proband **B**. Ansonsten wie in Abb.2

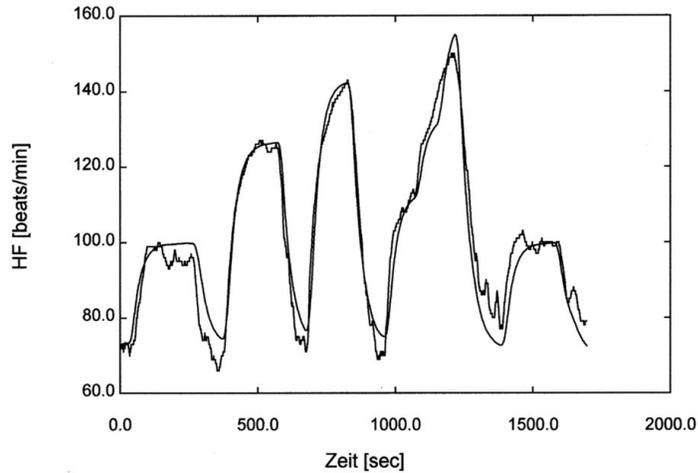


Abbildung 5: Wie für Abb.3; Proband **B**

ist als die maximale, (altersabhängig bedingte), kann ein Gleichgewicht nicht erreicht werden; der Versuch muß folglich abgebrochen werden.

- Zu jeder Testperson gehören individuelle Werte wie Ruhepuls, maximale Herzfrequenz, maximale Belastung sowie Relaxations- und Verzögerungszeit. Relaxation ( $a$ ) und Verzögerung ( $\tau$ ) sind Indikatoren für die Fitness der jeweiligen Testperson. Letztere erzeugt die (vermutlich weniger bekannte) diskrete, verzögerte Antwort des Herzens auf Lastwechsel. Je kürzer diese Zeiten sind, um so besser funktioniert die Anpassung des Herzens an geänderte Anforderungen.
- Der wirkliche Test des Modells steht natürlich noch aus: dafür müssten sich Personen verschiedenen Alters und unterschiedlicher Fitness melden. Gleichwohl geben die hier präsentierten Ergebnisse zu Hoffnung Anlass, dass mein Modell auch bei anderen Testpersonen Bestand haben könnte, die sorgfältige Bestimmung der Parameter vorausgesetzt.